



MODELOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En el desarrollo del proyecto Resolución de problemas mediante la solución de ecuaciones en Educación básica² se tuvo en cuenta un enfoque teórico que pone de relieve la validez y la pertinencia del empleo de modelos³ en el planteamiento y solución de ecuaciones que sirven como estrategia básica para la resolución de problemas.

El propósito de este proyecto, que se aplicó en todos los grados básicos de secundaria, fue propender al desarrollo de habilidades en la resolución de problemas, mediante el manejo de ecuaciones.

Se tomó la decisión de basar la propuesta en la idea de *modelo*. Para ello fue necesario estudiar algunas definiciones del término y el empleo que se ha hecho de esa palabra en la enseñanza de las matemáticas, con el fin de establecer el significado del término en el contexto del proyecto⁴.

En general, los modelos desarrollados con miras a la enseñanza de las matemáticas tienen dos componentes fundamentales. Uno es la traducción, por medio de la cual se les asigna significado y sentido a los objetos y a las operaciones en situaciones abstractas al proporcionar manifestaciones más concretas; de esta manera, el estado de cosas en el nivel concreto representa otro estado de cosas en un nivel más abstracto y la traducción se convierte en un proceso de doble sentido que permite identificar operaciones del nivel abstracto con operaciones del nivel concreto. Otro es la separación de los nuevos objetos y operaciones, introducidos por medio del modelo, de los detalles

de significado apropiados al contexto concreto.

Esta situación lleva a desprenderse de la semántica del modelo concreto, dado que lo que se busca no es la solución de un problema que el estudiante sabe cómo solucionar, sino la manera de solucionar situaciones más abstractas; por tanto, este componente dirige la construcción de sistemas de signos más abstractos.

Diagramas numéricos como modelo

Los estudiantes tienen la tendencia a quedarse y obtener logros en el contexto concreto. La fijación en el modelo puede demorar la construcción de una sintaxis algebraica que requiere un rompimiento de la semántica del modelo concreto. En el caso de estudiantes con una tendencia más sintáctica, algunos autores han

deja al desarrollo espontáneo de los estudiantes es usual que nieguen partes esenciales del modelo mismo, como la presencia de lo desconocido o la operación sobre éste; en tal caso, es necesaria la intervención del profesor para desarrollar el proceso y llevar a los estudiantes a la construcción de nuevas nociones.

Los planteamientos anteriores están de acuerdo con nuestras percepciones previas acerca del trabajo de los estudiantes con diagramas numéricos como modelo, lo cual les permite pasar fácilmente de la representación gráfica a la algebraica y solucionar las ecuaciones, pues siguen el diagrama en sentido contrario a las flechas y realizan las operaciones inversas a las indicadas. Sin embargo, luego se les dificulta despojarse de los diagramas para resolver ecuaciones y, en general, no pueden resolverlas sin ellos⁵.

Los estudiantes tienen la tendencia a quedarse y obtener logros en el contexto concreto. La fijación en el modelo puede demorar la construcción de una sintaxis algebraica que requiere un rompimiento de la semántica del modelo concreto.

observado obstáculos generados en el transcurso de abreviar las acciones y producir códigos intermedios entre el nivel concreto y el nivel algebraico sintáctico, que inhiben la abstracción de las operaciones realizadas. Por tanto, la dialéctica de los dos componentes de la modelización debe tomarse en consideración por los diseñadores de currículo para que no se obstruyan mutuamente. El rompimiento que se requiere es un proceso que niega parte de la semántica del modelo, que tiene lugar durante la transferencia del modelo de una situación problema a otra, pero cuando la generalización del modelo se

Fundamentados en todas estas ideas, se optó por usar la palabra *modelo* para nombrar no sólo modelos matemáticos y usar junto a un adjetivo que indique de qué tipo de modelo se habla al referirse a ese término. Por ejemplo, la balanza de brazos iguales se podría denominar como recurso para modelar o como modelo físico.

El desarrollo de los talleres

Los talleres que permitieron poner en práctica este proyecto se aplicaron en todos los grados de básica secundaria. Se consideraron diferencias en cada taller acordes

con el nivel de los estudiantes. No sólo se hicieron distinciones en el conjunto de números que se trataron en cada nivel, sino en relación con el tipo de tareas, el contenido matemático necesario para el manejo de ecuaciones y la complejidad de las tareas relacionadas.

Se tomó la decisión de promover la gradualidad en el nivel de complejidad de las tareas. La intención era que el estudiante al comienzo se motivara para resolver cosas cada vez más complejas y que esos primeros ejercicios le sirvieran para desarrollar los que venían. En segundo lugar, se buscó trabajar primero con lo particular y luego con lo general, aunque no todas las tareas propuestas necesitaron expresamente una generalización. En tercer lugar, se buscó propiciar el uso de modelos físicos y de modelos gráficos como representaciones de aquellos en que la manipulación de materiales tiene unas intenciones matemáticas precisas y podría, por tanto, ayudar a ilustrar y a la comprensión matemática.

En cuarto lugar, con los talleres se buscó abrir las posibilidades de trabajar el mismo mediante varias tareas para contribuir a extender la comprensión sobre un tema y a ver aspectos no reconocidos en una sola de las tareas. En quinto lugar, se buscó fomentar la utilización de varios sistemas de representación y ver la necesidad de *traducción* entre ellos para proveer varias perspectivas en el objeto matemático y, en consecuencia, ayudar a ampliar la conceptualización del mismo.

Finalmente se pretendió generar espacios frecuentes para socializar y discutir el trabajo realizado donde el profesor pudiera intervenir para dirigir el debate, todo ello enfatizando en la expresión verbal y en la argumentación del trabajo llevado a cabo en la resolución de los problemas.

Nivia Yela
Luis Fernando Almeciga
Germán Montezuma¹
e-mail: niyec@paisweb.com

PROPUESTA DIDÁCTICA

1. MODELO DE LA BALANZA

De acuerdo con lo que se plantea en los fundamentos teóricos sobre modelos, las actividades con el modelo de la balanza tienen la finalidad de lograr que los estudiantes le den un significado a la igualdad como equivalencia, utilicen incógnitas para cantidades desconocidas, apliquen la propiedad uniforme que planteen y resuelvan ecuaciones de la forma:

$$x \pm a = b \quad ax \pm b = c$$

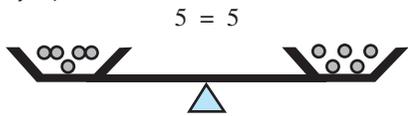
La propuesta didáctica se inicia con la construcción de la balanza de brazos iguales, la cual lleva unos recipientes a los lados como platos.

Para empezar, los estudiantes argumentan y escriben sobre el significado del equilibrio en la balanza, se escuchan varias opiniones y luego se sacan conclusiones en forma colectiva.

Posteriormente se realizan tareas como las siguientes:

- Equilibrar la balanza física de diferentes maneras, hacer una representación gráfica de la situación y colocar en frente de la representación gráfica la expresión aritmética.

Ejemplo:

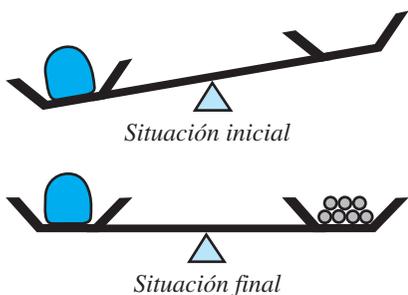


- Agregar o quitar la misma cantidad de monedas de igual peso a ambos platos de la balanza.

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} 4 = 4 \text{ cantidad inicial} \\ 3 = 3 \text{ cantidad final} \end{array}$$

- Colocar cierta cantidad de monedas dentro de una bolsita oscura, en uno de los platos de la balanza y en el otro ir colocando monedas hasta lograr el equilibrio de la balanza.



Los estudiantes escriben matemáticamente las situaciones presentadas en la balanza: la situación inicial y la situación final.

Por ejemplo para la primera situación:

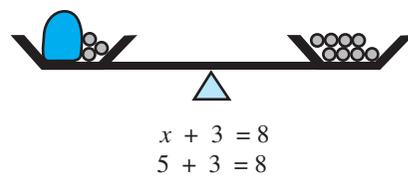
$$x = ?$$

Y para la segunda situación:

$$x = 7$$

- Colocar monedas al lado de la bolsita oscura (fuera de la bolsa), en uno de los platos de la balanza; estimar el número de monedas que pueden equilibrar la balanza, y en el otro plato colocar monedas hasta lograr el equilibrio de la balanza; escribir matemáticamente la situación: en forma aritmética la situación final y en forma algebraica la situación inicial.

Ejemplo:



El modelo se complejiza de acuerdo con el grado escolar (6° - 9°) de la siguiente manera:

- Colocar bolsitas en ambos platos de la balanza
- Cambiar la ubicación de la bolsita al lado izquierdo o derecho de la balanza.

2. EL MODELO DE LOS DIAGRAMAS

Con estas actividades se pretende que los estudiantes escriban ecuaciones a partir del enunciado de un problema, representen la ecuación por medio del diagrama y se resuelvan la ecuación y el problema.

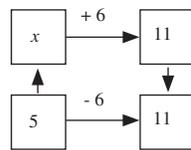
Se inicia con el planteamiento y escritura de los símbolos y signos utilizados en los diagramas de la siguiente manera:

- Las flechas indican las órdenes de cálculo; por ejemplo:

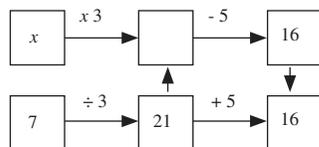
$$\begin{array}{l} \xrightarrow{x \cdot 3} \text{ el operador multiplicativo 3} \\ \xrightarrow{+3} \text{ indica el operador aditivo 3} \end{array}$$

A continuación se sugiere la representación de ecuaciones mediante diagramas; por ejemplo:

Dada la ecuación $x + 6 = 11$, representarla con un diagrama y solucionarla. Los estudiantes realizan el siguiente diagrama:



Otro ejemplo: representar mediante un diagrama la ecuación $3x - 5 = 16$.

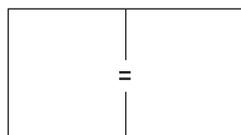


Una vez que los estudiantes han manejado la representación de ecuaciones mediante diagramas, se elabora un diseño que pretende que los estudiantes relacionen la representación en diagramas con la representación simbólica. El diseño tiene la siguiente estructura: una tabla de tres columnas, en cada una de las cuales se realiza una descripción verbal de la ecuación, la representación en el diagrama de la ecuación y el procedimiento simbólico de la solución.

3. MODELO "TABLERO DE FICHAS DE COLORES"

Esta actividad se inicia con la construcción del tablero y las fichas de colores.

El tablero consta de un rectángulo de manera de cartulina, dividido por una línea vertical y con un signo de igualdad en el centro.



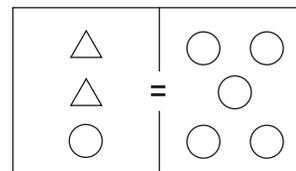
Las fichas se construyen en cartulina y están conformadas por:

- 20 triángulos negros que representan las incógnitas con coeficiente negativo.
- 20 triángulos blancos que representan las incógnitas con coeficiente positivo.
- 20 círculos negros para números negativos.
- 20 círculos blancos que representan los números positivos.

La única **regla de eliminación** es la siguiente: parejas de la misma forma y distinto color en un mismo lado del tablero, se neutralizan y eliminan.

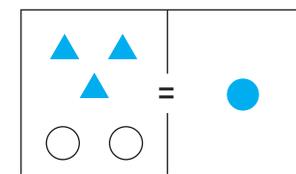
Para jugar se colocan las fichas sobre el tablero y se expresa matemáticamente el significado de las mismas, así:

Ejemplo. $2x + 1 = 5$



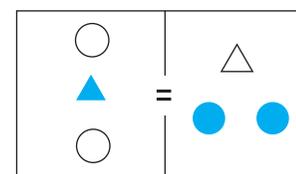
En el lado izquierdo del tablero hay dos triángulos blancos que representan dos veces la incógnita y un círculo blanco que representa el número 1; en el lado derecho del tablero hay 5 círculos blancos que representan el número cinco al otro lado de la ecuación.

En el siguiente ejemplo se observa la representación de la ecuación $-3x + 2 = -1$ en el tablero de fichas. Los tres triángulos negros representan tres veces la incógnita negativa y el círculo negro representa al número negativo del lado derecho de la ecuación.

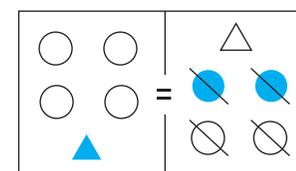


Una vez que los estudiantes sean capaces de representar matemáticamente cualquier ecuación en el tablero, se les solicita dejar los triángulos blancos en un mismo lado del tablero, lo cual se logra aumentando o quitando fichas de acuerdo con la regla de eliminación del juego.

Ejemplo:

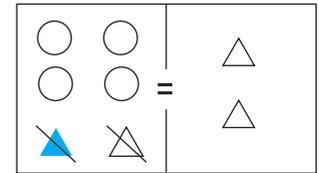


Para eliminar las dos unidades negativas del lado derecho se aumentan dos unidades positivas a ambos lados (dos círculos blancos a ambos lados), y se obtiene:



$$-x + 4 = -x - 2 + 2, \text{ equivalente a } -x + 4 = x$$

Para eliminar el triángulo negro del lado izquierdo se coloca a ambos lados un triángulo blanco y se obtiene:



$4 = x + x$ es decir $4 = 2x$; de donde se concluye que un triángulo blanco equivale a dos círculos blancos lo cual matemáticamente se expresa como $x = 2$ que es la solución de la ecuación original $-x + 2 = x - 2$.

Posteriormente se diseñan talleres que involucren actividades con los tres modelos: la balanza, los diagramas y el tablero de fichas, con la finalidad de que los estudiantes hagan transferencia de un modelo a otro y además que al hacer la transferencia pusieran en juego los conceptos y procedimientos aprendidos hasta el momento.

Por ejemplo:

- 1. Utilice diferentes modelos para resolver las siguientes ecuaciones lineales:

- $m + 7 = 23$
- $3x + 5 = 2x$
- $5t - 8 = 4t$
- $m - 6 = 8$
- $4x - 5 = 20$
- $3x + 8 = 5x - 6$

Resuelva los siguientes problemas utilizando el modelo o estrategia que usted desee:

- En un corral hay entre vacas y caballos 56 animales; si los caballos suman 12 menos que las vacas ¿cuántos hay en cada especie?
- La edad del padre es tres veces la del hijo; si ambas suman 64 años, ¿cuál es la edad de cada uno?
- ¿Cuánto tardan dos grifos en llenar una piscina si uno de ellos solo, la llena en seis horas y el otro solo, la llena en nueve horas?
- Dos hermanos tienen hoy 8 y 12 años de edad; ¿Dentro de cuántos años la edad del menor será la tercera parte de la edad del mayor?
- El perímetro de un rectángulo es de 80 metros; si a la altura se le suman 3 metros y a la base se le restan 3 quedan en una relación de 3 a 5; buscar esas dimensiones.

Artículo producto del proyecto de innovación Colegio Distrital Carlos Arango Vélez. Contrato No. 23 de 2002. Convocatoria 01 de 2002.

¹ Docentes de la Institución Educativa Distrital Carlos Arango Vélez J.T. E-mail: niyec@paisweb.com

² Proyecto llevado a cabo entre septiembre de 2002 y octubre de 2003 en la Institución Educativa Distrital Carlos Arango Vélez Jornada de la tarde.

³ La propuesta se basó en la secuencia de tareas que Socas, Camacho, Palarea y Hernández (1989) proponen y que utiliza distintos modelos gráficos (balanza, diagramas, esquemas) como ayudas intermedias para llegar a la representación algebraica de las ecuaciones.

⁴ De acuerdo con Bukhardt (1981) citado en Janvier (1996) y de acuerdo con De Lange (1987), citado en Janvier (1996), modelar involucra una fase de formulación durante la cual un fenómeno o situación es examinado con el fin de establecer algunas relaciones claves entre las variables implicadas. Para Janvier (1996), un modelo puede estar formulado en forma de expresión simbólica en la que una variable se expresa en términos de otras, en forma gráfica o como una tabla de números producida por un computador después de una simulación.

⁵ Algo similar fue observado por Torres, Valoyes, Malagón (2002), con otros modelos para plantear y resolver ecuaciones.